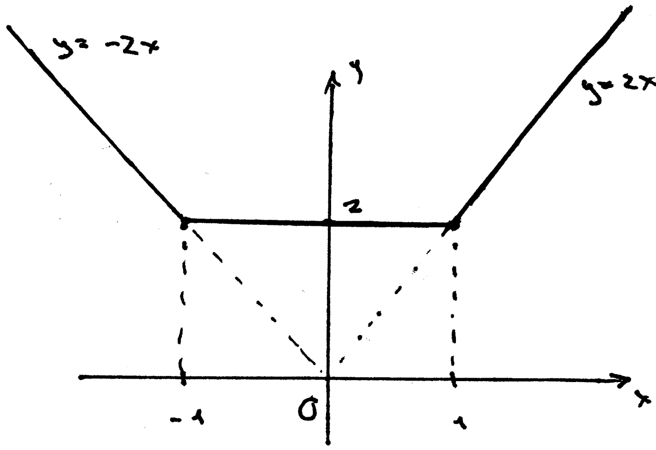
Correction de l'épreuve du 03/06/2009

MMP L3 SS session 2

Exercice 1



Commençons par dessiner l'allure de $f(x)$:

$x \geq 1 \Rightarrow f(x) = x+1+x-1 = 2x$

$x \leq -1 \Rightarrow f(x) = -x-1-x+1 = -2x$

$x \in [-1,1] \Rightarrow f(x) = x+1-x+1 = 2.$

Pour $g \in C_0^\infty(x)$ on a

$$\langle T_f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1}(-2x)g(x)\,dx + \int_{-1}^{1} 2\cdot g(x)\,dx$$

$$+ \int_1^\infty 2x\cdot g(x)\,dx$$

Par définition

$$\langle (T_f)', g\rangle = -\langle T_f, g'\rangle = \int_{-\infty}^{-1} 2x\, g'(x)\,dx - \int_{-1}^{1} 2g'(x)\,dx$$

$$-\int_1^\infty 2x\, g'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} 2x\,dg - \int_{-1}^{1} 2\,dg - \int_1^\infty 2x\,dg =$$

$$= 2xg\Big|_{-\infty}^{-1} - \int_{-\infty}^{-1} 2g\,dx - 2g\Big|_{-1}^{1} - 2xg\Big|_1^\infty + \int_1^\infty 2g\,dx$$

$$= \cancel{-2g(-1)} - \int_{-\infty}^{-1} 2g\,dx \cancel{-2g(1)} \cancel{+2g(-1)} \cancel{+2g(1)} + \int_1^\infty 2g\,dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{-1} 2g\,dx + \int_1^\infty 2g\,dx = \langle T_{\tilde f}, g\rangle,$$

↑ réponse

où $\tilde f(x)$ est définie par

$$\tilde f(x) = \begin{cases} -2 & \text{pour } x \leq -1 \\ 0 & \text{pour } x \in (-1,1) \\ 2 & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$$

De façon analogue,

$$\langle (T_f)'', g\rangle = -\langle (T_f)', g'\rangle = \int_{-\infty}^{-1} 2g'\,dx - \int_1^\infty 2g'\,dx =$$

$$= 2g\Big|_{-\infty}^{-1} - 2g\Big|_1^\infty = 2g(-1) + 2g(1) =$$

$$= \langle 2\delta_{-1} + 2\delta_{1}, g \rangle \quad \text{et donc} \quad (T_f)'' = 2\delta_{-1} + 2\delta_1 .$$

Exercice 2

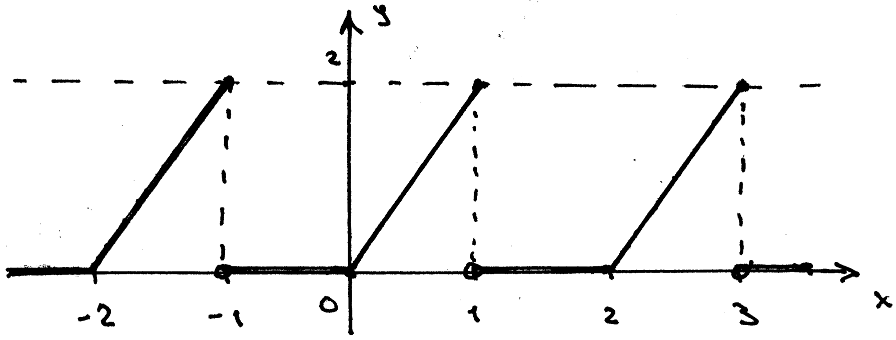
Traçons le graphe de notre fonction:

$x \in (-1, 0] \Rightarrow$

$f(x) = x + (-x) = 0$

$x \in [0, 1] \Rightarrow$

$f(x) = x + x = 2x$



Le développement de Fourier:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n x}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n x}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos \frac{2\pi n x}{T} dx, \quad \text{pour } n \neq 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx ,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin \frac{2\pi n x}{T} dx .$$

Ici $T = 2$ et donc:

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x\, dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \int_0^2 f(x) \cos \pi n x\, dx = \int_0^1 2x \cos \pi n x\, dx = \int_0^1 2x\, d\left(\frac{\sin \pi n x}{\pi n}\right)$$

$$= \underbrace{2x \frac{\sin \pi n x}{\pi n} \Big|_0^1}_{= 0} - \int_0^1 \frac{2 \sin \pi n x}{\pi n} dx = \frac{2 \cos \pi n x}{(\pi n)^2} \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2(\cos \pi n - 1)}{\pi^2 n^2} = \frac{2\left[(-1)^n - 1\right]}{\pi^2 n^2}$$

$= 0$ pour n pair

$= -\dfrac{4}{\pi^2 n^2}$ pour n impair

$$b_n = \int_0^2 f(x) \sin \pi n x\, dx = \int_0^1 2x \sin \pi n x\, dx =$$

$$= -\int_0^1 2x\, d \frac{\cos \pi n x}{\pi n} = -2x \frac{\cos \pi n x}{\pi n} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2 \cos \pi n x}{\pi n} dx =$$

$$= -2 \frac{(-1)^n}{\pi n} + \frac{2 \sin \pi n x}{(\pi n)^2} \Big|_0^1 = -2 \frac{(-1)^n}{\pi n} .$$

Alors on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k+1)^2} \cos\pi(2k+1)x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{\pi k} \sin\pi k x.$$

L'identité de Parseval:

$$\frac{1}{T}\int_0^T |g(t)|^2 dt = |a_0(g)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n(g)|^2 + |b_n(g)|^2}{2}$$

Dans notre cas

$$\frac{1}{T}\int_0^T |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^2 f^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 4x^2 dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$|a_0(g)|^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(g)|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^4(2k+1)^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n(g)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2}$$

et donc on obtient la relation

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{16}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{16}{\pi^4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{5}{6}.$$

Exercice 3. Nous avons un problème de Cauchy:

$$\begin{cases} 4y'' + y = \cos x \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 0 \end{cases}$$

1. On considère l'équation homogène correspondante et on cherche ses solutions:

$$4y'' + y = 0 \implies 4\lambda^2 + 1 = 0 \quad \text{(équation caractéristique)}$$

$$\lambda = \pm \frac{i}{2}$$

Alors on peut choisir 2 solutions indépendantes:

$g_1(x) = \sin\frac{x}{2}$, $g_2(x) = \cos\frac{x}{2}$.

2). A partir de ces solutions, on construit la fonction de Green. Comme

$$W(g_1(x), g_2(x)) = g_1 g_2' - g_1' g_2 = -\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cos^2\frac{x}{2} =$$
$$= -\frac{1}{2},$$

on obtient

$$G(x,y) = \frac{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} - \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}}{(-1/2)} =$$
$$= 2\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2} - \cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right) = 2\sin\frac{x-y}{2}.$$

3). A l'aide de la fonction de Green, on obtient la solution de notre problème de Cauchy:

$$y(x) = \frac{1}{4}\int_0^x G(x,y)\cos y\,dy = \frac{1}{4}\int_0^x 2\sin\frac{x-y}{2}\cos y\,dy =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^x \left(\sin\frac{x+y}{2} + \sin\frac{x-3y}{2}\right)dy =$$
$$= \frac{1}{4}\left(-2\cos\frac{x+y}{2} + \frac{2}{3}\cos\frac{x-3y}{2}\right)\Big|_0^x =$$
$$= \frac{1}{4}\left(-2\cos x + 2\cos\frac{x}{2} + \frac{2}{3}\cos x - \frac{2}{3}\cos\frac{x}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos x\right) = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos x\right).$$

4). Vérification: posons $h(x) = \frac{1}{3}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos x\right)$, alors

$$h'(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} + \sin x\right)$$

$$h''(x) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2} + \cos x\right)$$

$$4h'' + h = \frac{1}{3}\left(-\cancel{\cos\frac{x}{2}} + 4\cos x\right) + \frac{1}{3}\left(\cancel{\cos\frac{x}{2}} - \cos x\right) = \cos x$$

l'équation est vérifiée.

Conditions initiales:

$$h(0) = \frac{1}{3}\left(\underbrace{\cos 0}_{=1} - \underbrace{\cos 0}_{=1}\right) = 0$$

conditions initiales sont vérifiées

$$h'(0) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\underbrace{\sin 0}_{=0} + \underbrace{\sin 0}_{=0}\right) = 0$$

Exercice 4. Nous avons un problème à conditions limites:

$$\begin{cases} 16x^2y'' + 3y = 1 \\ y(1) = 0, \quad y'(4) = 0 \end{cases}$$

1). On cherche les solutions de l'équation homogène associée sous la forme $y = x^\vartheta$

$$16x^2y'' + 3y = 0 \Rightarrow 16\vartheta(\vartheta-1)x^\vartheta + 3x^\vartheta = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$16\vartheta^2 - 16\vartheta + 3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta = 256 - 12\cdot 16 = 8^2$$

$$\vartheta = \frac{16 \pm 8}{32} \Rightarrow \vartheta_1 = \frac{1}{4}, \quad \vartheta_2 = \frac{3}{4}$$

Alors la solution générale de l'équation homogène a la forme

$$y_{hom}(x) = C_1 x^{1/4} + C_2 x^{3/4}$$

2). On cherche la fonction de Green sous la forme

$$G(x,y) = \begin{cases} C_1(y)\, x^{1/4} + C_2(y)\, x^{3/4}, & 1 \leq x < y \leq 4 \\ D_1(y)\, x^{1/4} + D_2(y)\, x^{3/4}, & 1 \leq y < x \leq 4 \end{cases}$$

Cette fonction de Green doit vérifier les conditions limites:

$$G(x,y)\Big|_{x=1} = 0 \Rightarrow C_1(y) + C_2(y) = 0$$

$$\frac{dG(x,y)}{dx}\Big|_{x=4} = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{4}x^{-3/4}D_1(y) + \frac{3}{4}x^{-1/4}D_2(y)\right]_{x=4} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{4\cdot 2\sqrt{2}}D_1(y) + \frac{3}{4\sqrt{2}}D_2(y) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$D_1(y) + 6D_2(y) = 0.$$

Par conséquent:

$$G(x,y) = \begin{cases} C(y)\,(x^{1/4} - x^{3/4}), & 1 \leq x < y \leq 4 \\ D(y)\,(x^{3/4} - 6x^{1/4}), & 1 \leq y < x \leq 4. \end{cases}$$

Nous avons encore 2 conditions de continuité:

$$G(y-0,y) = G(y+0,y) \Rightarrow C(y)(y^{1/4}-y^{3/4}) = D(y)(y^{3/4}-6y^{1/4})$$

$$1 = \left[\frac{d}{dx}G(x,y)\right]_{x=y-0}^{y+0} = \left(\frac{3}{4}y^{-1/4}-\frac{6}{4}y^{-3/4}\right)D(y) -$$

$$-\left(\frac{1}{4}y^{-3/4}-\frac{3}{4}y^{-1/4}\right)C(y)$$

Cela donne un système de 2 équations pour $C(y), D(y)$.

$$\begin{cases} C(y)(y^{1/4}-y^{3/4}) = D(y)(y^{3/4}-6y^{1/4}) \\ -C(y)\left(\frac{1}{4}y^{-3/4}-\frac{3}{4}y^{-1/4}\right)+\left(\frac{3}{4}y^{-1/4}-\frac{6}{4}y^{-3/4}\right)D(y) = 1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$D(y)\left\{\frac{3}{4}y^{-1/4}-\frac{6}{4}y^{-3/4}-\left(\frac{1}{4}y^{-3/4}-\frac{3}{4}y^{-1/4}\right)\frac{y^{3/4}-6y^{1/4}}{y^{1/4}-y^{3/4}}\right\} = 1$$

$\Downarrow$

$$D(y)\cdot\frac{\frac{3}{4}-\cancel{\frac{3}{4}\sqrt{y}}-\cancel{\frac{6}{4}\frac{1}{\sqrt{y}}}+\frac{6}{4}-\frac{1}{4}-\frac{18}{4}+\cancel{\frac{6}{4}\frac{1}{\sqrt{y}}}+\cancel{\frac{3}{4}\sqrt{y}}}{y^{1/4}-y^{3/4}} = 1$$

$\Downarrow$

$$D(y)\cdot\frac{10/4}{y^{3/4}-y^{1/4}} = 1 \Rightarrow D(y) = \frac{2}{5}(y^{3/4}-y^{1/4})$$

$\Downarrow$

$$C(y) = -\frac{2}{5}(y^{3/4}-6y^{1/4})$$

3). L'expression finale pour la fonction de Green est:

$$G(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x^{3/4}-x^{1/4})(y^{3/4}-6y^{1/4}), & 1\le x<y\le 4 \\ \frac{2}{5}(x^{3/4}-6x^{1/4})(y^{3/4}-y^{1/4}), & 1\le y<x\le 4. \end{cases}$$

La solution de notre problème à conditions limites s'écrit donc comme

$$y(x) = \int_1^4 G(x,y)\frac{1}{16y^2}dy = \int_1^x \frac{2}{5}(x^{3/4}-6x^{1/4})\frac{y^{3/4}-y^{1/4}}{16y^2}dy$$

$$+\int_x^4 \frac{2}{5}(x^{3/4}-x^{1/4})\frac{y^{3/4}-6y^{1/4}}{16y^2}dy =$$

$$= \frac{2}{5}\left(x^{3/4} - 6x^{1/4}\right) \cdot \frac{1}{16} \int_1^x \left(y^{-5/4} - y^{-7/4}\right) dy \, +$$

$$+ \frac{2}{5}\left(x^{3/4} - x^{1/4}\right) \cdot \frac{1}{16} \int_x^4 \left(y^{-5/4} - 6y^{-7/4}\right) dy =$$

$$= \frac{2}{5}\left(x^{3/4} - 6x^{1/4}\right) \cdot \frac{1}{16}\left(-4y^{-1/4} + \frac{4}{3}y^{-3/4}\right)\Big|_1^x +$$

$$+ \frac{2}{5}\left(x^{3/4} - x^{1/4}\right) \cdot \frac{1}{16}\left(-4y^{-1/4} + 6 \cdot \frac{4}{3}y^{-3/4}\right)\Big|_x^4 =$$

$$= \frac{2}{5}\left(x^{3/4} - 6x^{1/4}\right) \cdot \frac{1}{4}\left(\left(-x^{-1/4} + \frac{1}{3}x^{-3/4}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right) +$$

$$+ \frac{2}{5}\left(x^{3/4} - x^{1/4}\right) \cdot \frac{1}{4}\left(-\left(-x^{-1/4} + 2x^{-3/4}\right) + \underbrace{\left(-4^{-1/4} + 2 \cdot 4^{-3/4}\right)}_{=0}\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(x^{3/4} - 6x^{1/4}\right)\left(\left(-x^{-1/4} + \frac{1}{3}x^{-3/4}\right) + \frac{2}{3}\right) +$$

$$+ \frac{1}{10}\left(x^{3/4} - x^{1/4}\right)\left(x^{-1/4} - 2x^{-3/4}\right) =$$

$$= \frac{1}{10}\left(-\cancel{\sqrt{x}} + 6 + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{2}{\sqrt{x}}}\right) + \frac{1}{15}\left(x^{3/4} - 6x^{1/4}\right)$$

$$+ \frac{1}{10}\left(\cancel{\sqrt{x}} - 2 - 1 + \cancel{\frac{2}{\sqrt{x}}}\right) = \frac{1}{15}\left(x^{3/4} - 6x^{1/4}\right) + \frac{1}{3}.$$